# Corrigé Examen National Maths Sciences pc et svt et Technologies 2025 Normale

## 2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

## Exercice 1

1. (a) Équation cartésienne de $S$ :

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=R^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=4}$$

   (b) Vérification des points :

   Pour $A(0,0,2)$ :

$$0^2+0^2+2^2=4$$

   Pour $B(2,0,0)$ :

$$2^2+0^2+0^2=4$$

   Alors $A \in (S)$ et $B \in (S)$

2. (a) Intersection du plan $(OAB)$ avec $S$ : L'intersection est un cercle de centre $O$ et de rayon 2 dans le plan $(OAB)$.

   (b) Distance $d(O,(AB))$ :

$$I\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow I(1,0,1)$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=(1)(2)+(0)(0)+(1)(-2)=2-2=0$$

$$d(O,(AB))=\|\overrightarrow{OI}\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\boxed{\sqrt{2}}$$

3. (a) Produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB}=(2,0,-2), \quad \overrightarrow{AM}=(0,m,-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & m & -2\end{vmatrix}=\boxed{2m\vec{i}+4\vec{j}+2m\vec{k}}$$

   (b) Vecteur normal $\vec{n}=(m,2,m)$, équation du plan :

$$m(x-0)+2(y-0)+m(z-2)=0 \Rightarrow \boxed{mx+2y+mz-2m=0}$$

   (c) Distance :

$$d(0,(ABM))=\frac{|m\cdot 0+2\cdot 0+m\cdot 0-2m|}{\sqrt{m^2+4+m^2}}=\frac{2|m|}{\sqrt{2m^2+4}}=\boxed{\frac{2|m|}{\sqrt{2(m^2+2)}}}$$

4. Calcul du rayon $r$ :

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\left(\frac{2|m|}{\sqrt{2m^2+4}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4-\frac{4m^2}{2m^2+4}}=\sqrt{\frac{4(2m^2+4)-4m^2}{2m^2+4}}$$
$$=\sqrt{\frac{8m^2+16-4m^2}{2m^2+4}}=\sqrt{\frac{4m^2+16}{2m^2+4}}=\boxed{\sqrt{2+\frac{4}{m^2+2}}}$$

**On a** :

Pour $m=0$ : $r=\sqrt{2+2}=2$ (maximum)
Quand $m\to\infty$ : $r\to\sqrt{2}$ (minimum)
Donc :

$$\boxed{\sqrt{2}<r\leq 2 \quad \forall m\in\mathbb{R}}$$

## Exercice 2 :

1. (a)

$$a+b=(1+2i)+(1-2i)=\boxed{2}$$

Le milieu $P$ de $[AB]$ a pour affixe :

$$p=\frac{a+b}{2}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

(b) Pour $z=a=1+2i$ :

$$\begin{aligned}a^2-2a+5&=(1+2i)^2-2(1+2i)+5\\&=1+4i+4i^2-2-4i+5\\&=1+4i-4-2-4i+5 \quad (i^2=-1)\\&=(-3+4i)-2-4i+5\\&=(-3-2+5)+(4i-4i)\\&=0+0i=0\end{aligned}$$

Pour $z=b=1-2i$ :

$$\begin{aligned}b^2-2b+5&=(1-2i)^2-2(1-2i)+5\\&=1-4i+4i^2-2+4i+5\\&=1-4i-4-2+4i+5\\&=(-3-4i)-2+4i+5\\&=(-3-2+5)+(-4i+4i)\\&=0+0i=0\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}|\omega-a|&=\left|\frac{5}{2}-(1+2i)\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|\\&=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$|\omega - b| = \left|\frac{5}{2} - (1-2i)\right| = \left|\frac{3}{2} + 2i\right|$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}$$

$$|\omega - c| = \left|\frac{5}{2} - \frac{3(3+i)}{2}\right| = \left|\frac{5-9-3i}{2}\right|$$
$$= \left|\frac{-4-3i}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

Donc $|\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c| = \frac{5}{2}$

(b) Puisque $\Omega$ est équidistante de $A$, $B$, et $C$, c'est le centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

3. (a) Calcul du rapport :

$$d - c = \frac{3(1+i)}{2} - \frac{3(3+i)}{2} = \frac{3-9+3i-3i}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$
$$a - b = (1+2i) - (1-2i) = 4i$$
$$\frac{d-c}{a-b} = \frac{-3}{4i} = \boxed{\frac{3i}{4}}$$

(b)

$$d - b = \frac{3(1+i)}{2} - (1-2i) = \frac{3+3i-2+4i}{2} = \frac{1+7i}{2}$$
$$c - a = \frac{3(3+i)}{2} - (1+2i) = \frac{9+3i-2-4i}{2} = \frac{7-i}{2}$$
$$(c-a)i = \frac{7-i}{2} \cdot i = \frac{7i-i^2}{2} = \frac{7i+1}{2} = \frac{1+7i}{2} = d-b$$

Ce qui confirme :

$$\boxed{d - b = (c-a)i = (c-a)e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

et :

$$\arg\left(\frac{d-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$
$$\boxed{(DB) \perp (AC)}$$

4. (a) On a :

$$z' - c = \frac{2}{3}(z-c) \Rightarrow z' = \frac{2}{3}z + \frac{c}{3} = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$
$$\boxed{z' = \frac{2}{3}z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}$$

(b) Affixe de $G = h(P)$ :

$$g = \frac{2}{3} \times 1 + \frac{3}{2} + \frac{i}{2} = \boxed{\frac{13}{6} + \frac{1}{2}i}$$

5.
$$\frac{\omega-g}{\omega-d}=\frac{\frac{5}{2}-\left(\frac{13}{6}+\frac{1}{2}i\right)}{\frac{5}{2}-\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i}{1-\frac{3}{2}i}$$
$$=\frac{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}i}{\frac{2}{2}-\frac{3}{2}i}=\frac{2-3i}{6}\times\frac{2}{2-3i}=\frac{2(2-3i)}{6(2-3i)}=\frac{1}{3}$$

Alors :
$$\arg\left(\frac{\omega-g}{\omega-d}\right)=0[2\pi]$$
ce qui signifie que les points sont alignés.

## Exercice 3 :

1. (a) Nombre total de tirages possibles :
$$C_6^2=15$$
$$P(A)=\frac{C_4^2}{15}=\boxed{\frac{2}{5}}$$
(b) Probabilité de l'événement $B$ :
$$P(B)=\frac{C_4^2+C_2^2}{15}=\boxed{\frac{7}{15}}$$
(c) Indépendance des événements $A$ et $B$ :
— Calcul de $P(A\cap B)$ :
$$C_3^2=3 \quad \text{(deux blanches numérotées 1)}$$
$$P(A\cap B)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$
— Vérification de l'indépendance :
$$P(A)\times P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{7}{15}=\frac{14}{75}\neq\frac{1}{5}$$
$$\boxed{\text{Les événements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

2. Répétition de l'expérience
On répète 3 fois l'expérience avec $p=P(A)=\frac{2}{5}$.
(a) Loi de probabilité de $X$ :
$$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$$

| $X=x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ |

(b) Espérance mathématique :
$$E(X)=\boxed{\frac{6}{5}}$$

# Problème

## Partie I

1. (a) La courbe $(C_g)$ (parabole $y = x^2$) est toujours au-dessus de $(C_h)$ sur $[0, +\infty[$, donc :

$$g(x) - h(x) > 0 \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

   (b) De $g(x) - h(x) > 0$ on déduit :

$$x^2 > 2\ln x - (\ln x)^2$$

   En divisant par $x^2 > 0$ :

$$2\ln x - (\ln x)^2 < 1 \quad \forall x \in ]0, +\infty[$$

2. (a) Primitive de $\ln x$ :

$$H(x) = x\ln x - x \quad \text{est une primitive car} \quad H'(x) = \ln x$$

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx = H(e^2) - H(1) = (e^2 \ln e^2 - e^2) - (1\ln 1 - 1) = \boxed{e^2 + 1}$$

   (b) Intégration par parties pour $(\ln x)^2$ :

$$u = (\ln x)^2 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{2\ln x}{x}$$

$$v' = 1 \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x} \, dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x \, dx$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = \boxed{2e^2 - 2}$$

   (c) Résolution de $h(x) = 0$ :

$$2\ln x - (\ln x)^2 = 0 \Rightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0$$

   Solutions :

$$x = 1 \quad \text{et} \quad x = e^2$$

   Points d'intersection : $\boxed{(1, 0)}$ et $\boxed{(e^2, 0)}$

   (d) Calcul de l'aire :

$$\mathcal{A} = \int_1^{e^2} h(x)dx = 2(e^2 + 1) - (2e - 2) = \boxed{4}$$

## Partie II

1. (a) Limite en $0^+$ :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$$

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{x} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

**Interprétation géométrique** : La courbe $C_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

(b) Limite en $+\infty$ : Posons $t = \sqrt{x}$, alors $x = t^2$ et quand $x \to +\infty$, $t \to +\infty$.

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2\ln t)^2}{t^2} = \frac{4(\ln t)^2}{t^2} = 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty$$

Donc :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - \frac{(\ln x)^2}{x}\right) = +\infty$$

(c) Asymptote oblique :

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{(\ln x)^2}{x}\right) = 0$$

Donc la droite $y = x$ est une asymptote oblique à $C_f$ en $+\infty$.

2. (a) Pour tous de $x \in ]0, +\infty[$ :

$$f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x} = x - x^{-1}(\ln x)^2$$

$$f'(x) = 1 - \left(-x^{-2}(\ln x)^2 + x^{-1}\cdot\frac{2\ln x}{x}\right) = 1 + \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$

(b) D'après Partie I, on sait que $2\ln x - (\ln x)^2 \leq 0$ pour tout $x > 0$, donc :

$$-\frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} > 0$$

Ainsi, $f$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3. (a) On a :

i) $f$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

ii) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in ]0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(b) Calculons $f(e^{-1})$ et $f(1)$ :

$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{(-1)^2}{e^{-1}} = e^{-1} - e < 0$$

$$f(1) = 1 - \frac{0}{1} = 1 > 0$$

Donc $\alpha \in ]e^{-1}, 1[$.

(c) On a :

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha - \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha^2 = (\ln \alpha)^2$$

Comme $\alpha \in ]0, 1[$, on a $\ln \alpha < 0$, donc :

$$\ln \alpha = -\alpha$$

(d) Calcul de la tangente en $x = 1$ :

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f'(1) = 1 - \frac{0 - 0}{1} = 1$$

Équation de la tangente :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = x$$

4. (a) Existence de $\varphi^{-1}$ : $\varphi$ est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, avec :

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(1) = 1$$

Donc $\varphi$ admet une réciproque $\varphi^{-1}$ définie sur $J = ]-\infty, 1]$.

(b) On a :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(0))} = \frac{1}{\varphi'(\alpha)}$$

Or :

$$\varphi'(\alpha) = f'(\alpha) = 1 - \frac{2(-\alpha) - (-\alpha)^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{2\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} = \frac{2 + 2\alpha}{\alpha}$$

Donc :

$$(\varphi^{-1})'(0) = \frac{\alpha}{2 + 2\alpha}$$

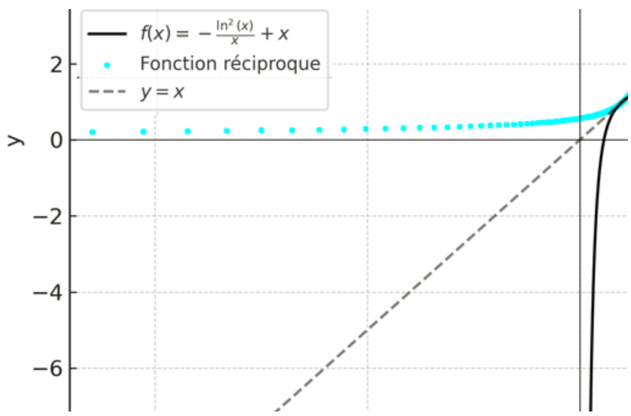


FIGURE 1 –

(c)

# Partie III

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

1. i) **Initialisation (n=0)** : $u_0 = e$ et $e > 1$. Donc $1 < u_0$.

   ii) **Hérédité** : Supposons $1 < u_n$ pour un $n$ fixé. D'après la Partie II-3-c, $f(x) \leq x$ pour $x > 0$. Comme $u_n > 1$ et $f$ est strictement croissante (Partie II-2-b), on a :

   $$f(u_n) > f(1) = 1 \quad \text{car} \quad f(1) = 1 - \frac{(\ln 1)^2}{1} = 1$$

   Ainsi, $1 < u_{n+1}$.

   iii) **Conclusion** : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n$.

2. (a) D'après la Partie II-3-c, $f(x) \leq x$ pour tout $x > 0$. Appliqué à $x = u_n$ (avec $u_n > 1$) :

   $$u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$$

   La suite est donc décroissante.

   (b) On a la suite est minorée par 1 (question 1) et décroissante (question 2-a). Donc $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$.

   (c) D'apres (Partie II-2-b), on a :

   $$\ell = f(\ell) \Rightarrow \ell = \ell - \frac{(\ln \ell)^2}{\ell} \Rightarrow \frac{(\ln \ell)^2}{\ell} = 0$$

   Ce qui implique $\ln \ell = 0$, soit $\ell = 1$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell = 1.}$